Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

ВАРИАНТ 187

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий варианта КИМ по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 1 Летом килограмм клубники стоит 75 рублей .Маша купила 2кг 200г клубники Сколько рублей сдачи она должна получить с 200 рублей?

Решение.

75·2,2=165(рублей) стоит клубника.

200-165=35(рублей) получит сдачи.

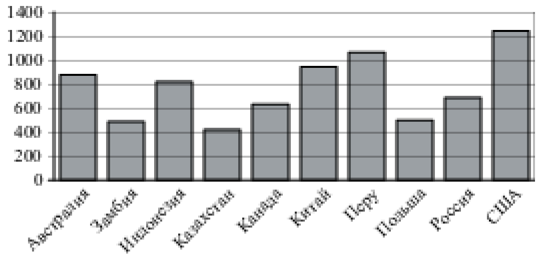
Ответ: 35.

В 2 Розничная цена учебника 156 рублей, она на 30% выше оптовой цены .Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 2000 рублей?

Решение. Розничная цена составляет 130% от оптовой цены .Чтобы найти 100% цены, разделим 156 на 1,3, 156:1,3=120

.2000:120≈16,67
Ответ: 16.

В 3 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Индонезия?



Решение.
Расположим страны в порядке убывания количества выплавки меди в год:

1) США
2) Перу
3) Китай
4) Австралия
5) Индонезия
6) Россия
7) Канада
8) Польша
9) Замбия
10) Казахстан

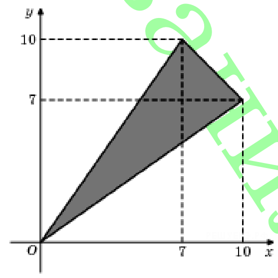
Индонезия находится на пятом месте
Ответ: 5.

В 4 . Для того, чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов зелёной шерсти . Можно купить зелёную пряжу по цене 80 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Решение.
Один моток пряжи весит 100 г., следовательно, на свитер нужно 9 мотков шерсти.
Рассмотрим два варианта.
Если покупать готовую пряжу зелёного цвета, то стоимость свитера будет 80·9 = 720 руб.
На неокрашенную пряжу нужно потратить 60 · 9 = 540 руб. Но на окраску пряжи потребуется 3 пакетика краски по 40 руб., то есть еще 120 руб. Итого на свитер из самостоятельно окрашенной пряжи потратится 660 руб.
Второй вариант дешевле, чем первый.

Ответ: 660

В 5 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0;0), (10;7), (7;10).



Решение.
Площадь треугольника равна разности площади квадрата со стороной 10 и трех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами заданного треугольника. Поэтому

$$S = 10\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 25{,}5.$$

Ответ: 25,5.

В 6 .В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос о производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не встретится вопрос о производной.

Решение:

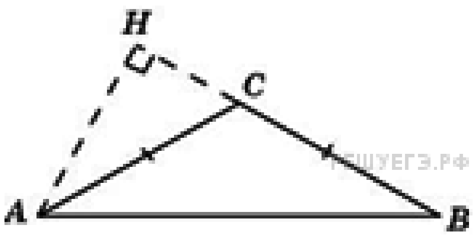
(20-7):20=0,65

Ответ: 0,65.

В **7 .** Найдите корень уравнения $(x-3)^3$.=-1000
Решение.

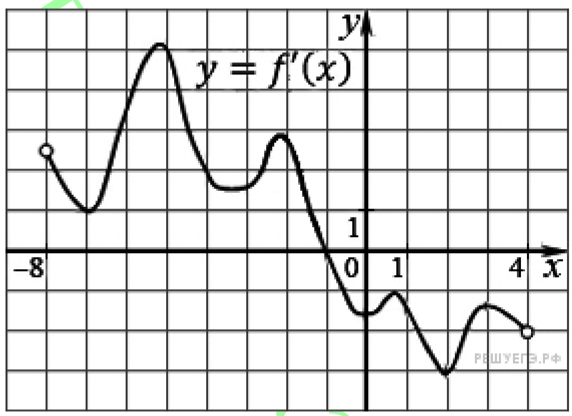
x-3=-10, x= -7
Ответ: -7

В 8 . В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен $150°$. Найдите высоту AH.



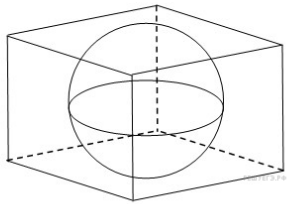
Решение.
$AH = AC\cdot \sin \angle ACH = 2\cdot \frac{1}{2} = 1$
Ответ: 1.

В 9 . На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Решение.
На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -7.
Ответ: −7

В 10 . В куб вписан шар радиуса 4. Найдите объем куба.



Решение.
Ребро куба равно диаметру вписанного в него шара, а объем куба равен кубу его ребра. Отсюда имеем :V=512

.

Ответ: 512

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 11 . Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{11}+\sqrt{5})^2}{8+\sqrt{55}}$.

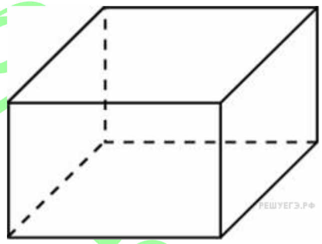
Решение
$\frac{(\sqrt{11}+\sqrt{5})^2}{8+\sqrt{55}}=\frac{11+5+2\sqrt{55}}{8+\sqrt{55}}=2$
Ответ: 2.

В 12. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км— радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 160 километров? Ответ выразите в километрах.
Решение.
Задача сводится к решению уравнения $l=160$ при заданном значении R:

$$\sqrt{2\cdot 6400h}=160 \Leftrightarrow 2\cdot 6400h=25\ 600 \Leftrightarrow h=\frac{25\ 600}{2\cdot 6400} \Leftrightarrow h=2.$$

Ответ: 2.

В 13. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 6. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 126. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



Решение
Пусть х-длина третьего ребра ,тогда площадь поверхности параллелепипеда равна
(3х+6х+3· 6)·2=126 и х=5.
Ответ: 5.

В 14. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на первой половине пути равна $v-13$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 2. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{2}{v}=\frac{1}{78}+\frac{1}{v-13}\underset{v>48}{\Leftrightarrow}2\cdot78(v-13)=v^2-13v+78v\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2-91v+52\cdot39=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=52;\\ v=39\end{array}\right.\underset{v>48}{\Leftrightarrow}v=52.$$

Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 52 км/ч.

Ответ: 52

В 15 №. Найдите наименьшее значение функции y= 9 cos x + 14x + 7 на отрезке$\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$

Решение.

Найдем производную заданной функции y= 9 cos x + 14x + 7 , y'=-9sin x + 14

Уравнение $y'=0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на данном отрезке является y(0)=16

. *Ответ: 16*

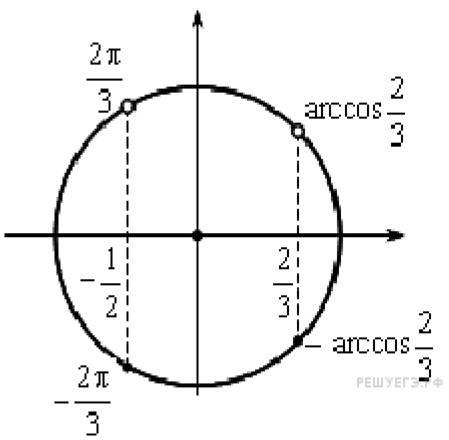
Для записи решений и ответов на задания С1-С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.),а затем полное обоснованное решение и ответ.

С 1. Решите уравнение $\dfrac{6\cos^2x-\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}6\cos^2x-\cos x-2=0,\\ -\sin x>0.\end{cases}$$

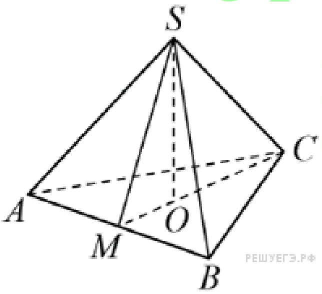


Из неравенства получаем, что $\sin x<0$. В уравнении сделаем замену $\cos x=t$ и решим уравнение $6t^2-t-2=0$: $t=-\frac{1}{2}$ или $t=\frac{2}{3}$. Равенствам $\cos x=-\frac{1}{2}$ и $\cos x=\frac{2}{3}$ на тригонометрической окружности соответствует четыре точки. Две из них, находящиеся в верхней полуплоскости, не удовлетворяют условию $\sin x < 0$. Получаем решения: $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ x = -\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ x = -\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

С 2 Высота *SO* правильной треугольной пирамиды *SABC* составляет $\dfrac{5}{7}$ от высоты *SM* боковой грани *SAB*. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

*Решение***.**



Пусть $SO = 5x$ и $SM = 7x$.

$$OM = x\sqrt{49-25} = x\sqrt{24} = 2x\sqrt{6}.$$

$$OC = 2OM = 4x\sqrt{6}.$$

Из треугольника COS находим:

$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{5x}{4x\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{24}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{6}}{24}.$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{6}}{24}.$

С 3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^{x+2} - 257\cdot 2^x + 16 \le 0, \\ 2\log_2\dfrac{x+2}{x-3,7} + \log_2(x-3,7)^2 \ge 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $y = 2^x$, имеем:

$$16y^2 - 257y + 16 \le 0 \Leftrightarrow (y-16)(16y-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \le y \le 16.$$

Отсюда получаем решение первого неравенства:

$$\frac{1}{16} \le 2^x \le 16 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4.$$

Решим второе неравенство. Первое слагаемое определено при $\dfrac{x+2}{x-3,7} > 0$, то есть при $x < -2$ или $x > 3,7$. Преобразуем неравенство:

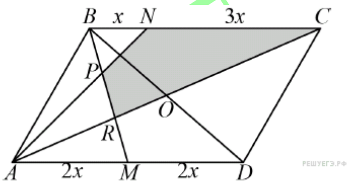
$$\log_2\frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2} + \log_2(x-3,7)^2 \ge 2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)^2 \ge 2 \Leftrightarrow (x+2)^2 \ge 4 \Leftrightarrow x(x+4) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -4, \\ x \ge 0. \end{array}\right.$$

Получаем решение второго неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ x > 3,7. \end{array}\right.$$

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств: $x = -4$ или $3{,}7 < x \leq 4$.
Ответ: $\{-4\} \cup (3{,}7;\ 4]$.

С 4 На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1:3$.
а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.
б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках C, N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.
Решение.



а) Обозначим точки пересечения прямой BM с прямыми AN и AC буквами P и R соответственно.
Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда AO и BM — медианы треугольника ABD, значит,

$$MR = \frac{1}{3}BM.$$

Из подобия треугольников BPN и MPA находим, что

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BN}{AM} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $BP = \frac{1}{3}BM.$ Из доказанного следует, что $BP = PR = RM$

б) Пусть площадь параллелограмма равна S. Из подобия треугольников MRA и BRC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ следует, что высота треугольника BRC, проведённая к стороне BC, составляет $\frac{2}{3}$ высоты параллелограмма, проведённой к той же стороне. Следовательно, площадь треугольника BRC равна

$$S_{BRC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{S}{3}.$$

Аналогично найдём площадь треугольника BNP. Его высота, проведённая к BN, составляет $\frac{1}{3}$ высоты параллелограмма, проведённой к стороне BC, а сама сторона BN в четыре раза меньше стороны параллелограмма BC. Поэтому

$$S_{BNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S = \frac{1}{24}S.$$

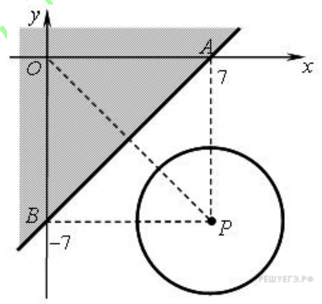
Следовательно, площадь четырёхугольника $PRCN$ равна

$$\frac{1}{3}S - \frac{1}{24}S = \frac{7}{24}S = \frac{7}{24} \cdot 48 = 14$$

Ответ: 14.

С 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a - 2xy} = y - x + 7$ имеет единственное решение.
Решение.

$$\sqrt{a-2xy}=y-x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+7\geq 0, \\ a-2xy=x^2+y^2+49-2xy-14x+14y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+7\geq 0, \\ (x-7)^2+(y+7)^2=a+49. \end{cases}$$



Неравенство $y-x+7\geq 0$ задает на координатной плоскости «верхнюю» полуплоскость с границей $y-x+7=0$, а уравнение $(x-7)^2+(y+7)^2=a+49$ при $a>-49$ — окружность с центром $P(7;\,-7)$ и радиусом $R=\sqrt{a+49}$ (см. рисунок).

Окружность и полуплоскость имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда радиус окружности равен половине диагонали *PO* квадрата *APBO*, т. е., $\sqrt{a+49}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$, откуда $a=-24,5$.

При $a<-49$ уравнение, а, следовательно, и вся система решений не имеют, а при $a=-49$ решением уравнения является пара $(7;-7)$, которая не удовлетворяет неравенству $y-x+7\geq 0$.

Ответ: $a=-24,5$.

С 6 . Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(14+\ldots+20)-7(-4-\ldots-8)=5\left(\frac{14+20}{2}\cdot 7\right)+7\left(\frac{4+8}{2}\cdot 5\right)=35\cdot 23=805.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из полученных сумм будет не четной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:
$5(-14-15+16-17+18-19+20)-7(-4+5+6-7-8)=-5\cdot 11+7\cdot 8=-55+56=1.$

Ответ: 1 и 805.